Mejoramiento del desempeño en matemáticas

Douglas A. Grouws
y Kristin J. Cebulla

SERIE PRÁCTICAS EDUCATIVAS - 4

CENEVAL®

Cinvestav
Departamento de Investigaciones Educativas

CONSEJO MEXICANO DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA, A.C.

INEE
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

INTERNATIONAL ACADEMY OF EDUCATION

IBE

Mejoramiento del desempeño en matemáticas

Douglas A. Grouws
y Kristin J. Cebulla

Instituciones participantes

Oficina Internacional de Educación
Academia Internacional de Educación

Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C.
Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C.
Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Universidad Pedagógica Nacional

El original de este folleto fue publicado en 2000 por la Academia Internacional de Educación, Palais des Académies, 1, rue Ducale, 1000 Bruselas, Bélgica, y la Oficina Internacional de Educación (IBE), P.O. Box 199, 1211, Ginebra 20, Suiza.

El folleto está disponible en inglés y ahora en español y puede ser traducido y reproducido libremente a otros idiomas. Enviar por favor una copia de cualquier publicación que reproduzca parcial o totalmente este texto a la IAE y el IBE. La publicación también está disponible en internet en su forma impresa en http://www.ibe.unesco.org

Los autores son responsables de los contenidos y opiniones de esta publicación, los cuales no necesariamente son compartidos por el IBE-UNESCO y de ningún modo comprometen a este organismo. Las denominaciones empleadas y la presentación del material de esta publicación no implican la expresión de opinión alguna de parte del IBE-UNESCO en lo concerniente al estatuto legal de cualquier país, ciudad o área, de sus autoridades, fronteras o límites.

La traducción al español fue realizada por el Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior de México (Ceneval) y revisada por la Dra. María de Ibarrola, miembro de la Academia Internacional de Educación e investigadora del Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav. Ciudad de México, febrero de 2006.

Distribución gratuita

Contenido

Prefacio 5
Introducción 7
1. Oportunidades para aprender 11
2. Enfoque significativo 15
3. Aprender nuevos conceptos y habilidades mediante la solución de problemas 17
4. Oportunidades para la invención y la práctica 19
5. Apertura a la solución de problemas y a la interacción entre los estudiantes 21
6. Aprendizaje en grupos pequeños 23
7. Discusión con toda la clase 27
8. El sentido numérico 29
9. Utilización de objetos 31
10. El uso de calculadoras 33
Conclusiones 37
Recursos adicionales 41
Referencias 45

Prefacio

Esta guía ha sido adaptada para su inclusión en la serie *Prácticas educativas* desarrollada por la Academia Internacional de Educación (IAE, por sus siglas en inglés) y distribuida por ésta y la Oficina Internacional de Educación (IBE). Como parte de sus funciones, la Academia publica periódicamente síntesis de investigaciones sobre temas educativos de importancia internacional. Este folleto es el cuarto de la serie sobre prácticas educativas que generalmente mejoran el aprendizaje.

El material fue preparado originalmente para el *Manual de investigación sobre el mejoramiento del desempeño del estudiante*, editado por Gordon Cawelti y cuya segunda edición fue publicada en 1999 por el Servicio de Investigación Educativa (ERS). El manual, que también incluye capítulos sobre materias como prácticas genéricas y ciencias, está disponible en ERS (2000 Clarendon Boulevar, Arlington, VA 22201-2908, USA; teléfono (1) 800-791-9308; fax (1) 800-791-9390 y dirección electrónica: www.ers.org).

El ERS es una fundación no lucrativa que atiende las necesidades de investigación e información de directivos y especialistas en el campo educativo y del público en general. Fundada en 1973, es patrocinada por siete organizaciones, a saber: *American Association of School Administrators, American Association of School Personnel Administrators, Association of School Business Officials, Council of Chief State School Officers, National Association of Elementary School Principals, National Association of Secondary School Principals* y *National School Public Relations Association*. Como vicepresidente de la Academia y editor de la presente serie, agradezco a los funcionarios del ERS por permitir a la Academia y a la Oficina poner a disposición de los educadores de otras regiones del mundo la adaptación de este texto.

El primer autor del folleto, Douglas A. Grouws, es profesor de educación matemática en la Universidad de Iowa. Fue editor del *Manual de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (McMillan, 1992) y entre sus créditos está otro gran número de publicaciones sobre investigación en educación de las matemáticas.

Ha sido invitado a la presentación de investigaciones en Australia, China, Hungría, Guam, India, Japón, México, Tailandia y Reino Unido. Ha dirigido diferentes proyectos de investigación en el área de solución de problemas matemáticos y prácticas de enseñanza en el salón de clases, para la Fundación Nacional de la Ciencia (NSF) y otras instituciones. Su actual labor en la NSF concierne a las matemáticas y a la tecnología. Se doctoró en la Universidad de Wisconsin.

La segunda autora, Kristin J. Cebulla, estudia el doctorado en educación matemática en la Universidad de Iowa. Enseñó matemáticas en el nivel medio y antes de dedicarse a la enseñanza se desempeñó como investigadora en ingeniería química. Recibió su grado de licenciatura en ciencias en matemáticas e ingeniería química en la Universidad de Notre Dame y su grado de maestría en la Universidad de Mississippi.

Los principios descritos en este folleto provienen en gran parte de Estados Unidos y otros países de habla inglesa. Otras investigaciones tienen también importantes implicaciones para la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo es la Educación Matemática Realista, iniciada por H. Freudenthal y desarrollada desde inicios de la década de 1970 en la Universidad de Utrecht (Dordrecht, Países Bajos, Kluwer, 1991); otro ejemplo es la investigación sobre solución de problemas resumida en el reciente libro de L. Verschaffel, B. Creer y E. De Corte: *Making sense of word problems* (Lisse, Países Bajos: Swets y Zeitlinger, 2000).

Los profesionales de la Academia Internacional de Educación saben que la guía está basada en investigaciones realizadas fundamentalmente en países económicamente avanzados. Sin embargo, se centra en aspectos de la enseñanza que pueden ser universales para gran parte de la escuela formal y en prácticas de probable aplicación en todo el mundo. En todo caso, los principios que aquí se presentan deben ser evaluados y consecuentemente adaptados teniendo como referencia las condiciones de cada lugar. En cualquier marco educativo, las sugerencias y las guías para la práctica requieren ser aplicadas con sensibilidad y sensatez, además de ser evaluadas de forma continua.

Introducción

Este folleto resume el capítulo de matemáticas del *Manual de investigación sobre el mejoramiento del desempeño del estudiante*, cuya segunda edición fue publicada por el Servicio de Investigación Educativa. El manual se basa en la idea de que, con el fin de ser exitosos, los esfuerzos para mejorar la instrucción deben estar cimentados en el conocimiento existente acerca del aprendizaje y la enseñanza efectivos. Específicamente, el manual fue diseñado para ayudar a los docentes y administradores escolares en la evolución de su trascendental papel de liderazgo, al proporcionarles una fuente de información autorizada y basada en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje efectivos.

Las prácticas sugeridas en el folleto reflejan una mezcla de estrategias emergentes y otras usadas ya durante mucho tiempo. Los autores resumen la investigación que sustenta cada práctica, describen como puede aplicarse la investigación en el salón de clases y formulan una lista de los estudios más importantes que fundamentan la práctica. Al final del libro se presenta una lista completa de referencias para los lectores que deseen estudiar y comprender las prácticas con mayor profundidad.

En la mayoría de los casos, los resultados de la investigación sobre prácticas específicas de enseñanza muestran una ventaja escasa o moderada. En el campo de la educación debemos entender, seleccionar cuidadosamente y usar combinaciones de prácticas de enseñanza que, unidas, puedan incrementar la probabilidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes, con el conocimiento de que esas prácticas quizá no sean útiles en todo salón de clases y en todo momento.

La mayor posibilidad de mejorar el aprendizaje de los estudiantes se da en escuelas donde se introducen múltiples cambios en las actividades de enseñanza-aprendizaje que afectan la vida diaria del estudiante. Por ejemplo, si el propósito es mejorar la habilidad del alumno para resolver problemas científicos, la escuela podría planear el entrenamiento de los maestros en: 1) el uso del enfoque del ciclo del aprendizaje, 2) la utilización de la computadora para el desarrollo de modelos y simulaciones y 3) las aproximaciones sistemáticas a la solución de problemas. La planeación simultánea de

este entrenamiento y otros recursos necesarios para sustentar los tres cambios no sería un compromiso pequeño, pero sí un gran apoyo para mejorar la calidad del estudiante al resolver problemas.

Los hallazgos de investigación presentados en este trabajo son un punto de partida para desarrollar extensos planes escolares que mejoren la instrucción en matemáticas. Los maestros y directivos inevitablemente requerirán invertir tiempo para estudios posteriores, discusiones y otras exposiciones acerca de lo que implica cada práctica, antes de decidir incluirla en sus planes escolares.

Debe reconocerse la complejidad que conlleva aplicar en el salón de clases el conocimiento existente acerca del mejoramiento del desempeño del estudiante. Como escribe Dennis Spaks en su capítulo sobre desarrollo de personal en el *Manual de investigación sobre mejoramiento del desempeño del estudiante*, las escuelas y los distritos escolares tienen la responsabilidad de establecer una cultura en la cual los docentes pueden ejercitar su competencia profesional, explorar las prácticas prometedoras y compartir información entre ellos, al tiempo que mantienen la atención en la finalidad última del desarrollo del personal: mejorar el aprendizaje del estudiante.

Mejoramiento de la efectividad del maestro

El número de investigaciones sobre la educación en matemáticas en las tres últimas décadas creció significativamente (Kilpatrick, 1992). El acervo de investigación resultante abarca un amplio rango de contenidos, niveles y metodologías de investigación. Los resultados de esos estudios, junto con los hallazgos relevantes provenientes de la investigación en otras áreas, tales como la psicología cognitiva, se usan para identificar las estrategias y prácticas de enseñanza efectivas.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son tareas complejas. Es difícil discernir el impacto en el aprendizaje del estudiante al cambiar una sola práctica de enseñanza, debido al efecto simultáneo de las otras actividades de enseñanza que la rodean y al contexto en el cual se lleva a cabo la enseñanza.

Así, en tanto los maestros procuran mejorar la efectividad de su enseñanza mediante el cambio en sus prácticas educativas, deben considerar cuidadosamente el contexto en el que imparten la enseñanza y especialmente el tipo de estudiantes a los que enseñan. Además no deben juzgar los resultados de sus nuevas prácticas demasia-

do pronto. Los juicios acerca de lo apropiado de sus decisiones han de basarse en algo más que un resultado único. Si los resultados no son completamente satisfactorios, los maestros deben considerar las circunstancias que pudieron disminuir el impacto de las prácticas aplicadas. Por ejemplo, el valor de enfocar la enseñanza en el significado puede no ser demostrado si los estudiantes son evaluados mediante la memorización rutinaria de datos y el uso eficiente de habilidades aisladas.

La calidad en la aplicación de la práctica de enseñanza también influye considerablemente en el impacto que tiene en el aprendizaje del estudiante. El valor de manipular materiales para investigar un concepto, por ejemplo, depende no sólo de *si se utilizan materiales* sino de cómo lo hacen los estudiantes. De igual manera, la instrucción por grupos pequeños beneficiará a los estudiantes sólo si el maestro conoce cuándo y cómo usar esta técnica de enseñanza. Por lo tanto, si los maestros aplican estas recomendaciones es esencial que observen constantemente la manera como la práctica es implementada, a fin de puedan ajustarla y optimizarla.

A pesar de estas precauciones, la investigación indica que determinados métodos y estrategias de enseñanza merecen ser cuidadosamente considerados, en tanto los maestros se esfuerzan por mejorar sus técnicas de enseñanza de las matemáticas.

A medida que el lector examine las sugerencias que siguen se verá cómo muchas de ellas están interrelacionadas. Hay gran variedad en las prácticas que han demostrado ser efectivas, y los maestros deben tener la habilidad para identificar aquellas ideas que les gustaría utilizar en sus salones. Las prácticas no son mutuamente exclusivas o excluyentes; por el contrario, tienden a ser complementarias. La consistencia lógica y variedad de las sugerencias derivadas de la investigación las hacen interesantes y prácticas.

Los autores desean reconocer las útiles sugerencias de los siguientes colegas: Tom Cooney, profesor de matemáticas, Universidad de Georgia; James Hiebert, profesor de educación de las matemáticas, Universidad de Delaware; Judy Sowder, profesora de matemáticas, Universidad Estatal de San Diego, y Ferry Word, profesor de educación de las matemáticas, Universidad Purdue.

I. Oportunidades para aprender

Las oportunidades que tienen los estudiantes para aprender matemáticas incrementan directa y decisivamente el desempeño de los alumnos en esa área.

Resultados de la investigación

El término *oportunidades para aprender* se refiere a lo que se estudia o lo que se incorpora en las tareas que desarrollan los alumnos. En matemáticas, las oportunidades para aprender incluyen el alcance de las matemáticas que se presentan, las formas como se enseñan, y la correspondencia entre las habilidades que traen los alumnos al iniciar y el aprovechamiento de los nuevos materiales. La estrecha relación entre las oportunidades para aprender y el desempeño del estudiante en matemáticas ha sido documentada en múltiples estudios de investigación. El concepto fue abordado en el *Primer Estudio Internacional de Matemáticas* (Husén), en el que se solicitó a los maestros estimar la magnitud de la exposición de los estudiantes a conceptos y habilidades matemáticos en particular. Se encontró una fuerte correlación entre los puntajes asignados a las oportunidades para aprender y el puntaje medio en el desempeño del estudiante en matemáticas. La liga entre el desempeño de los estudiantes en matemáticas y la oportunidad para aprender también se encontró en estudios internacionales subsecuentes, como en el *Segundo Estudio Internacional de Matemáticas* (McKnight *et al.*) y el *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencia* (TIMSS) (Schmidt, Mcknight y Raizen).

Como era de esperarse, hay también una correlación positiva entre el tiempo total dedicado al estudio de las matemáticas y el desempeño general en esta disciplina. Suárez *et al.*, en una revisión de la investigación sobre el tiempo dedicado a la enseñanza, encontraron una sólida evidencia para confirmar el vínculo entre el tiempo que se destina a la instrucción y el desempeño del estudiante. Keeves halló una relación significativa en los distintos estados australianos entre el desempeño en matemáticas y el tiempo total del currículo asignado a las matemáticas.

A pesar de esos resultados de investigación, muchos estudiantes todavía disponen de una proporción mínima de tiempo para sus clases de matemáticas. Por ejemplo, Grouws y Smith, al analizar datos de 1996 del estudio de matemáticas de la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP, en inglés) encontraron que 20% de los estudiantes de octavo grado tenían 30 minutos o menos de instrucción de matemáticas al día.

La investigación también ha detectado una estrecha relación entre tomar cursos de matemáticas en la escuela secundaria y el desempeño del estudiante. Los reportes de la NAEP muestran que "la cantidad de cursos avanzados de matemáticas tomados es el predictor más poderoso" del desempeño de los estudiantes en matemáticas, después de ajustar las variaciones del contexto familiar.

Los libros de texto también se relacionan con las oportunidades para aprender porque muchos no incluyen contenidos nuevos para los estudiantes. La falta de atención a materiales novedosos y el énfasis en el repaso de muchos libros de texto es asunto de particular preocupación en los niveles escolares básico y medio. Flanders examinó diferentes series de libros de texto y encontró que menos de 50% de sus páginas contenían nuevo material para los estudiantes de segundo a octavo grados. En la revisión de una docena de textos de matemáticas para el nivel medio, Kulm, Morris y Grier hallaron que la mayoría de los textos tradicionales carecían de muchas de las recomendaciones formuladas en los documentos sobre estándares recientes.

Los datos de Estados Unidos del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencia (TIMSS) mostraron diferencias importantes en el contenido enseñado en los distintos cursos y clases de matemáticas. Por ejemplo, los estudiantes en clases de regularización o remediales, en clases típicas de octavo grado y en clases de preálgebra fueron expuestos a contenidos de matemáticas muy distintos y su nivel de ejecución varió por consiguiente. Los tests o pruebas de desempeño usados en estudios internacionales y en la NAEP miden importantes resultados matemáticos y comúnmente proveen una amplia y representativa cobertura de las matemáticas. Además, las pruebas sirven para medir lo que incluso los estudiantes más hábiles conocen y desconocen. En consecuencia, proveen una medición de resultados razonable para la investigación que examina la importancia de la oportunidad de aprender como un factor en el desempeño del estudiante en matemáticas.

En el aula

Los hallazgos acerca de la relación entre las oportunidades para aprender y el desempeño del estudiante tienen importantes implicaciones para los maestros. En particular, parece prudente destinar suficiente tiempo a la instrucción en matemáticas en cada grado y nivel. Clases de matemáticas de corta duración, instituidas por cualquier razón filosófica o práctica deberían ser seriamente cuestionadas. Una preocupación especial son las clases de matemáticas de 30 a 35 minutos que se han establecido en algunas escuelas de nivel medio.

Los libros de texto que dedican mayor atención al repaso e incluyen escasos contenidos nuevos en cada grado deben evitarse, o bien utilizarse junto con material suplementario de manera apropiada. Los maestros deberían usar los libros de texto sólo como una herramienta entre muchas otras, en vez de sentir la obligación de seguir el libro de texto sección por sección (una por día).

Los profesores deben estar seguros de dar a sus alumnos las oportunidades para aprender las habilidades y contenidos importantes. Si los estudiantes han de competir en una sociedad global, orientada hacia la tecnología, se les deben enseñar las habilidades matemáticas que requieren. Así, si la solución de problemas es esencial, se le debe dar una atención explícita sobre bases regulares y sólidas. Si se espera desarrollar en los alumnos un sentido de los números, es importante poner énfasis, como parte del currículo, a la estimación y el cálculo mental. Si los razonamientos proporcional y deductivo son importantes, se les debe dar atención en el plan de estudios que se aplica en aula.

Es importante notar que las oportunidades para aprender están relacionadas con cuestiones de equidad. Algunas prácticas educativas afectan la oportunidad de aprender de grupos particulares de estudiantes. Por ejemplo, un estudio reciente de la Asociación Americana de Mujeres Universitarias, mostró que hombres y mujeres utilizan la tecnología de manera marcadamente distinta. Las mujeres toman menos cursos de ciencias de la computación y diseño en computadoras que los hombres. Además, los hombres frecuentemente usan las computadoras para programar y resolver problemas, mientras que las mujeres tienden a usarlas principalmente como procesadores de texto. Esto sugiere que, a medida que la tecnología sea empleada en la clase de matemáticas, los maestros deben asig-

nar tareas y responsabilidades a los estudiantes, de modo que ambos géneros tengan experiencias de aprendizaje activas con las herramientas tecnológicas empleadas.

Las oportunidades para aprender se ven también afectadas cuando los estudiantes de bajo rendimiento son ubicados dentro de un plan de estudios especial de habilidades básicas, orientado hacia el desarrollo de habilidades metodológicas, con pocas opciones para desarrollar las habilidades de solución de problemas y pensamiento de alto nivel. El currículo empobrecido frecuentemente proporcionado a estos estudiantes es un problema especialmente serio porque los conceptos e ideas no enseñados o poco enfatizados son aquellos que más se requieren en la vida diaria y en el mundo laboral.

Referencias: American Association of University Women (1998); Atanda (1999); Flanders (1987); Grouws y Smith (en prensa); Hawkins, Stancavage y Dossey (1998); Husén (1967); Keeves (1976, 1994); Kulm, Morris y Grier (1999); McKnight *et al.* (1987); Mullis, Jenkins y Johnson (1994); National Center for Education Statistics (1996, 1997, 1998); Schmidt, McKnight y Raizen (1997); Secada (1992), y Suarez *et al.* (1991).

2. Enfoque significativo

Enfocar la enseñanza en el desarrollo significativo de los conceptos matemáticos importantes incrementa el nivel de aprendizaje del estudiante.

Resultados de la investigación

La historia de la investigación sobre los efectos de la enseñanza en la comprensión de los conceptos matemáticos es larga. Desde los trabajos de Wiliam Brownell en la década de los cuarenta, las investigaciones han revelado consistentemente que poner énfasis en la enseñanza de los conceptos significativos tiene efectos positivos en el aprendizaje del estudiante, incluyendo un mejor aprovechamiento inicial, mayor retención y un incremento en la probabilidad de que las ideas sean usadas en nuevas situaciones. Estos resultados también se han encontrado en zonas de alta pobreza.

En el aula

Como se podría esperar, el término "enseñanza significativa" ha variado de estudio en estudio y ha evolucionado a través del tiempo. Los maestros querrán conocer cómo sus numerosas interpretaciones pueden ser incorporadas a su práctica en el aula:

- *Poner énfasis en el significado matemático de las ideas*, incluyendo la manera como la idea, concepto o habilidad se conecta en múltiples vías con otras ideas matemáticas, de forma razonable y lógicamente consistente. De este modo, para la resta se resalta la relación inversa o de "deshacer" entre ella y la suma. En general, el acento en el significado era común en las investigaciones tempranas en esta área, a finales de la década de 1930, y su propósito era evitar que las ideas matemáticas más importantes fueran enseñadas con menor atención en comparación con el énfasis puesto en el uso y la utilidad de las matemáticas en la vida diaria.

- *Crear un contexto de aprendizaje en el aula en el cual los estudiantes puedan construir el significado de los conceptos matemáticos.* Los alumnos pueden aprender matemáticas tanto en contextos vinculados directamente con situaciones de la vida real como en aquellos puramente matemáticos. La abstracción del ambiente de aprendizaje y la forma como los estudiantes se relacionan con él deben de ser regulados con cuidado, vigilados de cerca y escogidos concienzudamente, además de tomar en cuenta los intereses y la trayectoria de los estudiantes. Las matemáticas que se enseñan y se aprenden deben parecer razonables; así tendrán sentido para los estudiantes. Un factor decisivo en la enseñanza mediante significados es la conexión de nuevas ideas y habilidades con el conocimiento y las experiencias pasadas.
- *Hacer explícitos los vínculos entre las matemáticas y otras materias.* La instrucción podría relacionar, por ejemplo, las habilidades para la colección y representación de información con encuestas de opinión pública en estudios sociales, o bien se podría vincular el concepto de variación directa en matemáticas con el de fuerza en física, para ayudar a establecer un referente de la idea en el mundo real.
- *Poner atención a los significados y a la comprensión de los estudiantes.* La manera en que se conciben las ideas varía entre los estudiantes, al igual que sus métodos para resolver problemas y dar seguimiento a los procedimientos. Los maestros deben construir sobre las nociones y los métodos intuitivos al diseñar e implementar la enseñanza.

Referencias: Aubrey (1997); Brownell (1945, 1947); Carpenter *et al.* (1998); Cobb *et al.* (1991); Fuson (1992); Good, Grouws y Ebmeier (1983); Hiebert y Carpenter (1992); Hiebert y Wearne (1996); Hiebert *et al.* (1997); Kamii (1985, 1989, 1994); Knapp, Shields y Turnbull (1995); Koehler y Grouws (1992); Skemp (1978); Van Engen (1949), y Wood y Sellers (1996, 1997).

3. Aprender nuevos conceptos y habilidades mediante la solución de problemas

Los estudiantes pueden aprender conceptos y habilidades por medio de la resolución de problemas.

Resultados de la investigación

La investigación sugiere que aquellos alumnos que desarrollan de manera temprana el conocimiento de los conceptos matemáticos tendrán más tarde un mejor conocimiento procedimental. Los estudiantes con un buen conocimiento de los conceptos matemáticos tienen un desempeño exitoso en tareas de transferencia cercana y en el desarrollo de procedimientos y habilidades que no se les han enseñado aún. Aquellos estudiantes que no poseen o presentan bajos niveles de conocimiento conceptual son capaces de adquirir conocimiento de procedimientos cuando se les enseña, pero la investigación sugiere que necesitan más práctica para adquirirlo.

Heid afirma que los estudiantes son capaces de entender conceptos sin un desarrollo previo o simultáneo de habilidades. En su investigación con alumnos de cálculo, las instrucciones se enfocaban casi por completo a la comprensión de conceptos. Las habilidades se enseñaban brevemente al final del curso. En las habilidades de procedimiento, los estudiantes que siguieron el enfoque de comprensión conceptual se desempeñaron igual que los alumnos que aprendieron con un enfoque tradicional, pero significativamente superior a éstos en la comprensión conceptual.

Mack demostró que el conocimiento memorizado por los estudiantes (a menudo incorrecto) muchas veces interfiere con su conocimiento informal (usualmente correcto) acerca de las fracciones. Ella usó con éxito el conocimiento informal de los estudiantes al ayudarlos a entender símbolos para fracciones y desarrollar algoritmos para operaciones. De la investigación de Fawcett con estudiantes de geometría se desprende que pueden aprender los conceptos básicos, las

habilidades y la estructura de la geometría a través de la resolución de problemas.

En el aula

Hay evidencia de que los alumnos son capaces de aprender nuevas habilidades y conceptos resolviendo problemas. Por ejemplo, estudiantes provistos únicamente del conocimiento básico de la suma pueden extender su aprendizaje mediante el desarrollo de algoritmos informales para sumar números más grandes. Asimismo, al resolver problemas no rutinarios bien seleccionados, los estudiantes desarrollarán la comprensión de muchos conceptos matemáticas importantes, como los números primos y las relaciones área-perímetro.

La adquisición de habilidades matemáticas más sofisticadas puede abordarse tratando su desarrollo como un problema que los estudiantes deberán resolver. Los maestros tienen la posibilidad de usar los conocimientos informales e intuitivos de los alumnos en otras áreas para desarrollar diferentes procedimientos útiles. La enseñanza puede comenzar con un problema del cual los estudiantes saben la respuesta por intuición; a partir de ahí se les permitirá explorar y desarrollar su propio algoritmo. Por ejemplo, la mayoría de los alumnos entiende que si tienen cuatro pizzas y se comen la mitad de una, les quedaran tres pizzas y media. Ellos pueden utilizar este conocimiento para entender la resta de fracciones.

De acuerdo con la investigación, no es necesario que los maestros se concentren primero en el desarrollo de habilidades para después avanzar hacia la resolución de problemas: ambos se pueden ejercitar juntos. Las habilidades se pueden desarrollar en la medida en que se vayan necesitando o pueden suplirse mediante el uso de tecnologías. De hecho, existe evidencia de que si a un alumno inicialmente se le instruye demasiado en habilidades aisladas tendrá después dificultad para comprenderlas.

Referencias: Cognition and Technology Group (1997), Fawcett (1938), Heid (1988), Hiebert y Wearne (1996), Mack (1990), Resnick y Omanson (1987), y Wearne y Hiebert (1988).

4. Oportunidades para la invención y la práctica

Si se da a los alumnos la oportunidad tanto de descubrir e inventar conocimiento como de practicar lo aprendido, se mejora su aprovechamiento.

Resultados de la investigación

Información derivada del video realizado como parte del Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) muestra que en Estados Unidos más de 90% del tiempo dedicado a las clases de matemáticas en el octavo grado, se usa para practicar procedimientos de rutina; el resto del tiempo se asigna a la aplicación de los procedimientos en situaciones nuevas. Prácticamente, no se invierte tiempo en la invención de nuevos procedimientos ni en el análisis de situaciones poco usuales. En contraste, estudiantes del mismo grado en aulas japonesas típicas pasan aproximadamente 40% del tiempo de clase practicando procedimientos de rutina, 15% aplicando estos conocimientos en nuevas situaciones y el 45% restante inventan nuevos procedimientos y analizan situaciones novedosas.

Evidencias derivadas de la investigación sugieren que los estudiantes deben tener la oportunidad de inventar y de practicar. Numerosos estudios muestran que cuando los estudiantes descubren conceptos matemáticos e inventan procesos entienden de manera más conceptual las conexiones entre nociones matemáticas.

Muchos programas exitosos orientados a reformar incluyen tiempo para que los estudiantes practiquen lo que han aprendido y descubierto. Los estudiantes necesitan oportunidades de ejercitar lo aprendido y experimentar su desempeño en el tipo de tareas en las cuales se espera que demuestren competencia. Por ejemplo, si los maestros quieren que sus discípulos sean muy eficientes en la resolución de problemas, deberán tener oportunidades de resolver problemas; si la meta es un razonamiento deductivo sólido, se les darán tareas en las que se requiera aplicar este tipo de razonamiento y, por supuesto,

si la competencia en los procedimientos es el objetivo, el currículo debe atender a estos procedimientos.

En el aula

Obviamente se necesita un balance entre el tiempo que los estudiantes ocupan en procedimientos de rutina y el que dedican a inventar y descubrir nuevas ideas. No es necesario que los maestros escojan entre estas actividades; de hecho, no deben efectuar elección alguna si se pretende que los alumnos desarrollen el dominio matemático que necesitan. Los maestros procurarán que ambas actividades se incluyan en la proporción y la forma adecuadas. La investigación citada al inicio de este apartado sugiere que actualmente la atención es desproporcionada, frecuentemente se atiende en exceso al trabajo de habilidades, con pocas opciones para que los estudiantes se incorporen en actividades que den sentido y estén orientadas hacia el descubrimiento.

Para incrementar las oportunidades para la invención, los maestros deberán usar con frecuencia problemas no rutinarios, introducirán periódicamente lecciones que incluyan nuevas habilidades –planteándolas como problemas por resolver– y permitirán que sus alumnos construyan con regularidad conocimiento nuevo basado en su conocimiento intuitivo y en procedimientos informales.

Referencias: Boaler (1998), Brownell (1945, 1947); Carpenter *et al.* (1998), Cobb *et al.* (1991), Cognition and Technology Group (1997), Resnick (1980), Stigler y Hiebert (1997), y Wood y Sellers (1996, 1997).

5. Apertura a la solución de problemas y a la interacción entre los estudiantes

La enseñanza que aprovecha la intuición de los estudiantes para la solución de problemas puede incrementar el aprendizaje, especialmente cuando se combina con oportunidades para la interacción y la discusión entre ellos.

Resultados de la investigación

Resultados recientes del estudio TIMSS revelan que en las aulas japonesas se usan intensamente durante el tiempo de clase métodos de solución aportados por los estudiantes. Esta misma técnica de enseñanza aparece en muchos proyectos de investigación estadounidenses exitosos. Los estudios revelan claramente dos principios importantes que se relacionan con el desarrollo del entendimiento conceptual profundo de los estudiantes en las matemáticas:

- Primero, el aprovechamiento y entendimiento de los estudiantes mejora significativamente cuando los maestros son concientes de cómo sus alumnos construyen el conocimiento, están familiarizados con los métodos intuitivos de solución que los estudiantes usan cuando resuelven problemas y utilizan este conocimiento para planear y conducir la enseñanza de las matemáticas. Estos resultados se han demostrado claramente en la educación primaria y se empiezan a demostrar en los siguientes grados.
- Segundo, si la instrucción se estructura alrededor de problemas cuidadosamente seleccionados, se permite a los estudiantes interactuar durante su solución y se les da la oportunidad de compartir los métodos que usan para resolverlos, se incrementa el desempeño en la resolución de problemas. Debe destacarse que con estos logros no se disminuye el desempeño de las habilidades y conceptos evaluados mediante pruebas estandarizadas.

La investigación ha demostrado también que cuando los estudiantes tienen oportunidades para desarrollar sus propios métodos de solución, son más aptos para aplicar los conocimientos matemáticos en situaciones que conllevan problemas nuevos.

En el aula

Los resultados de la investigación sugieren que los maestros deberían concentrarse en proporcionar a los estudiantes oportunidades para interactuar en situaciones altamente problemáticas. Además, los maestros deberían alentar a sus estudiantes a encontrar sus propios métodos de solución y propiciar la ocasión para que compartan y comparen sus métodos y resultados. Un modo de organizar ese tipo de enseñanza es que los estudiantes trabajen primero en grupos pequeños y después compartan ideas y soluciones discutiéndolas en clase.

Una técnica de enseñanza útil consiste en que el maestro asigne a sus estudiantes un problema interesante y circule por el aula detectando qué estudiantes están usando tal o cual estrategia (tomando notas si es necesario). En una situación de clase con todo el grupo, el maestro puede hacer que sus estudiantes discutan sus procedimientos para la solución de problemas en un orden cuidadosamente predeterminado, jerarquizando los métodos del más básico al más formal o sofisticado. En Japón, esta estructura de enseñanza ha tenido éxito en muchas lecciones de matemáticas.

Referencias: Boaler (1998); Carpenter *et al.* (1988, 1989, 1998); Cobb, Yackel y Wood (1992); Cobb *et al.* (1991); Cognition and Technology Group (1997); Fennema, Carpenter y Peterson (1989); Fennema *et al.* (1993, 1996); Hiebert y Wearne (1993, 1996); Kamii (1985, 1989, 1994); Stigler y Hiebert (1997); Stigler *et al.* (1999); Wood, Cobb y Yackel (1995); Wood *et al.* (1993), y Yackel, Cobb y Wood (1991).

6. Aprendizaje en grupos pequeños

Al formar grupos pequeños de estudiantes para trabajar en actividades, problemas y tareas se puede incrementar el aprovechamiento de los alumnos en matemáticas.

Resultados de la investigación

Abundante evidencia de investigación sobre la educación matemática indica que usar grupos pequeños de varios tipos para diferentes tareas en el aula tiene efectos positivos en el aprendizaje del alumno. Davidson, por ejemplo, revisó cerca de 80 estudios de matemáticas que comparaban el aprovechamiento de los estudiantes en grupos pequeños con la enseñanza tradicional a la clase completa. En más de 40% de estos estudios, los alumnos en grupos pequeños superaron significativamente el desempeño de los estudiantes del grupo de control. Sólo en dos de esos estudios los alumnos del grupo de control tuvieron un mejor desempeño que los del grupo pequeño, aunque en ellos había irregularidades en el diseño.

Luego de hacer una revisión de 99 estudios sobre métodos de aprendizaje en grupos cooperativos de escuelas primarias y secundarias, Slavin concluyó que estos métodos eran efectivos para mejorar el aprovechamiento de los estudiantes. Los métodos más eficientes enfatizan tanto las metas de grupo como la responsabilidad individual.

De la revisión hecha por Webb acerca de 17 estudios en los que se examina la interacción entre alumnos en grupos pequeños (de segundo a onceavo grados) surgieron varios resultados consistentes. Primero, explicar una idea, método o solución a un compañero del grupo se relaciona positivamente con el aprovechamiento. Segundo, no recibir la retroalimentación adecuada por parte de un compañero se relaciona negativamente con el aprovechamiento. La revisión de Webb mostró también que el trabajo en grupo era más efectivo cuando se enseñaba a los estudiantes cómo laborar en grupo y cómo dar y recibir ayuda. La ayuda obtenida era más efectiva si se proporcionaba en forma de explicaciones elaboradas (no sólo como respuesta) y después era aplicada al problema en cuestión o a uno nuevo.

Investigaciones sobre calidad han demostrado que otros resultados importantes, y a menudo no medidos –que van más allá del mejoramiento del aprovechamiento general–, pueden deberse al trabajo en grupos pequeños. En una de estas investigaciones, Yeckel, Cobb y Wood estudiaron un aula de segundo grado cuya estrategia principal para todo el año lectivo era la solución de problemas en pequeños grupos seguida de una discusión de la clase completa. Este enfoque creaba muchas oportunidades de aprendizaje que no ocurrían típicamente en las sesiones tradicionales, incluyendo oportunidades para la discusión en grupo y la resolución de puntos de vista conflictivos.

Asimismo, la investigación de Slavin mostró efectos positivos del trabajo en grupos pequeños en torno a las relaciones interétnicas y las actitudes de los estudiantes hacia la escuela.

En el aula

Los resultados obtenidos en la investigación apoyan claramente la organización de la clase en grupos pequeños para la enseñanza de las matemáticas. Este acercamiento puede redundar en el incremento del aprendizaje del estudiante, medido con estándares de aprovechamiento tradicionales, y también mejorar otros resultados importantes. Cuando se establecen grupos pequeños para la instrucción de las matemáticas, los maestros deben:

- escoger tareas que involucren ideas y conceptos matemáticos importantes;
- seleccionar tareas apropiadas para trabajar en grupo;
- arreglar que los estudiantes trabajen al principio individualmente en una tarea para después hacerlo en un grupo donde los estudiantes compartan sus ideas y trabajo individual;
- dar instrucciones y expectativas claras a cada grupo;
- enfatizar tanto en metas grupales como la responsabilidad individual;
- escoger tareas que capten el interés de los estudiantes;
- asegurarse de que el trabajo de grupo concluya dando la oportunidad para que los conceptos y procedimientos clave emerjan de los estudiantes, de los maestros o de ambos.

Finalmente, como han revelado muchas investigaciones, los maestros no deben pensar en trabajar todo el tiempo con grupos pequeños, pero tampoco que no deben de conformarlos nunca. Es preferible que la instrucción en grupos pequeños sea considerada como una práctica educativa apropiada para ciertos objetivos de aprendizaje y también como una práctica útil junto con otros esquemas de organización, incluyendo la instrucción para una clase completa.

Referencias: Cohen (1994); Davidson (1985); Laborde (1994); Slavin (1990; 1995); Webb (1991); Webb, Troper y Fall (1995), y Yackel, Cobb y Wood (1991).

7. Discusión con toda la clase

La discusión general en clase después del trabajo individual y grupal mejora el desempeño del estudiante.

Resultados de la investigación

La investigación sugiere que las discusiones en las que participe toda la clase pueden ser efectivas cuando son usadas para compartir y explicar la variedad de soluciones mediante las cuales los estudiantes han resuelto problemas de manera individual. Esto permite a los alumnos conocer las múltiples formas de examinar una situación y la diversidad de soluciones apropiadas y aceptables.

Wood encontró que la discusión general en clase funciona mejor cuando se tienen claras las expectativas que se esperan de ella. Se esperaría que los alumnos evaluaran los razonamientos de sus compañeros sin criticar a quien emite la opinión. Esto ayudaría a crear un ambiente en el cual los estudiantes se sientan cómodos compartiendo ideas y discutiendo sobre los métodos y conceptos de cada uno. Se debería esperar, además, que los estudiantes fuesen oyentes activos y participaran en la discusión con un sentido de responsabilidad y con ánimo de entenderse unos con otros.

La investigación cognitiva sugiere que el cambio conceptual y el progreso del pensamiento son resultado de procesos mentales involucrados en la solución de conflictos y contradicciones. Así, cuando son cuidadosamente controlados por el maestro, la confusión y el conflicto durante la discusión en el aula tienen un potencial considerable para incrementar el aprendizaje de los estudiantes.

A medida que los estudiantes confrontan sus métodos, fortalecen también sus conceptos y procedimientos al trabajar juntos para resolver sus diferencias de opinión o sus confusiones. En cierto sentido, la discusión se convierte en un esfuerzo en colaboración orientado a resolver problemas. Cada individuo, entonces, está contribuyendo a obtener un beneficio colectivo relacionado con la solución de problemas. Esta discusión ayuda a producir la noción de conocimiento común (conocimiento público).

En el aula

Es importante que las discusiones generales en clase sean posteriores a las actividades de solución de problemas que ejecutan los estudiantes. La discusión debería ser una síntesis del trabajo individual, en el cual las ideas clave fueran sacadas a relucir. Esto puede lograrse si los estudiantes presentan y discuten sus métodos individuales de solución, o bien mediante otros métodos que permitan conclusiones, dirigidos por el maestro, los estudiantes o ambos.

La discusión general puede ser también una herramienta efectiva de diagnóstico para determinar la profundidad del conocimiento de los estudiantes e identificar errores conceptuales. Los maestros encontrarían áreas de dificultad para determinados estudiantes, así como áreas de progreso o éxito.

La discusión en la que participen todos los alumnos pudiera ser una práctica docente efectiva y útil. Algunas de las oportunidades de instrucción que el debate general en la clase ofrece no se dan en grupos pequeños o en el trabajo individual. Así, este tipo de discusión tiene un lugar importante en el aula junto con otras prácticas de enseñanza.

Referencias: Ball (1993), Cobb *et al.* (1992) y Wood (1999).

8. El sentido numérico

La enseñanza de las matemáticas enfocada al sentido numérico alienta a los alumnos a resolver problemas en una amplia variedad de situaciones y a ver las matemáticas como una disciplina en la que pensar es importante.

Resultados de la investigación

El sentido numérico se refiere a tener sensibilidad intuitiva para el cálculo de números y la combinación de éstos, así como a la habilidad de trabajar de manera flexible con números al enfrentar problemas, con el fin de tomar decisiones sólidas y hacer juicios razonables. Involucra la capacidad de usar con flexibilidad los procesos mentales para calcular, hacer estimaciones y tener sensibilidad respecto de las magnitudes numéricas, cambiar los sistemas de representación de los números y juzgar la plausibilidad de los resultados numéricos.

Markowits y Sowder estudiaron aulas de séptimo grado (primero de secundaria) donde se enseñaban unidades especiales sobre magnitudes numéricas, cálculo mental y estimación computacional. Mediante entrevistas individuales determinaron que después de esta enseñanza especial los estudiantes eran más propensos a usar estrategias que reflejaban un sentido numérico sólido y que, además, este cambio era de larga duración.

Otra investigación importante en esta área concierne a la integración del desarrollo del sentido numérico con la enseñanza de otros temas matemáticos, en oposición a enseñar por separado la sensibilidad numérica. Cobb y sus colegas descubrieron que el sentido numérico de alumnos de segundo grado se mejoró, como resultado de un currículo centrado en problemas que puso énfasis en la interacción de los estudiantes y en la autogeneración de métodos de solución. Casi todos desarrollaron una variedad de estrategias para resolver un amplio rango de problemas. Los estudiantes también mostraron otros resultados afectivos deseables, como una mayor persistencia en la solución de problemas.

Kamii trabajó con maestros de primaria que trataban de implantar un enfoque de instrucción enraizado en la teoría constructivista del aprendizaje, basada en los estudios de Piaget. Un punto central de este enfoque era proporcionar a los estudiantes situaciones en las que pudieran desarrollar sus propios significados, métodos y sentido numérico. Datos obtenidos en entrevistas con los estudiantes mostraron que el grupo en cuestión presentó mayor autonomía, comprensión conceptual del valor posicional de los números, habilidad para hacer estimaciones y cálculos mentales, que los estudiantes de otras aulas con los que fueron comparados.

En el aula

Prestar atención al sentido numérico cuando se enseña una amplia variedad de temas matemáticos tiende a profundizar las habilidades de los estudiantes en esta área. La competencia en los diversos aspectos del sentido numérico es un gran logro para los que estudian matemáticas. Más de 90% del cálculo hecho fuera del aula se hace sin lápiz ni papel, usando el cálculo mental, la estimación o una calculadora. Sin embargo, en muchas aulas se atienden insuficientemente los esfuerzos para inculcar un sentido numérico adecuado.

Al desarrollar estrategias para propiciar la sensibilidad numérica, los maestros deberían considerar seriamente cambiar el enfoque de habilidades por unidad de enseñanza (por ejemplo, centrándose en actividades individuales y aisladas) por un acercamiento más integral que aliente la evolución del sentido numérico en todas las actividades del aula, desde el desarrollo de procedimientos de cálculo hasta la solución de problemas matemáticos. A pesar de que se necesita más investigación, seguramente un acercamiento integral a la sensibilidad numérica arrojará resultados importantes.

Referencias: Cobb *et al.* (1991), Greeno (1991), Kamii (1985, 1989, 1994), Markovits y Sowder (1994), Reys y Barger (1994), Reys *et al.* (1991) y Sowder (1992a, 1992b).

9. Utilización de objetos

El uso prolongado de objetos manipulables durante la enseñanza matemática se relaciona positivamente con el aumento en los logros de los estudiantes y con la mejora de su actitud frente a esta ciencia.

Resultados de la investigación

Muchos estudios muestran que el empleo de materiales concretos durante la enseñanza de las matemáticas puede contribuir a que los estudiantes adquieran un mejor uso de los sistemas de registro e incrementen su desarrollo conceptual. En una revisión global del aprendizaje de matemáticas basado en actividades desde preescolar hasta octavo grado, Suydam y Higgins concluyeron que usar objetos manipulables produce mayores logros que no usarlos. Luego de un meta-análisis más reciente, a partir de 60 estudios (preescolar-postsecundaria), que compara los efectos del uso materiales concretos con los resultados de una instrucción más abstracta, Sowell concluyó que la utilización prolongada de objetos manipulables por parte de los maestros mejoró el aprovechamiento y la actitud de los alumnos.

A pesar de que la mayoría de los efectos son positivos, hay algunas inconsistencias en los resultados de la investigación. Como Thompson señala, los resultados concernientes a objetos variaron, incluso entre tratamientos rigurosamente controlados y monitoreados y que involucraban los mismos materiales. Por ejemplo, en estudios realizados por Resnick-Omanson y por Labinowicz, el uso de bloques de base-diez mostró poco impacto en el aprendizaje de los niños. En contraste, Fuson-Briars y Hiebert-Wearne reportaron resultados positivos por el uso de este tipo de bloques.

Las diferencias entre los resultados de estos estudios podrían deberse a la naturaleza del compromiso que asumen los alumnos con los objetos y a la orientación de éstos en relación con la notación y los valores numéricos. También podrían deberse a las diferentes orientaciones de los estudios con respecto al rol de los algoritmos computacionales y a cómo deberían ser desarrollados en el aula. En

general, sin embargo, las ambigüedades en algunos de los resultados de la investigación no minan el consenso general: los objetos manipulables son herramientas valiosas para la enseñanza de las matemáticas.

En el aula

A pesar de que la enseñanza exitosa requiere que los maestros elijan cuidadosamente sus procedimientos de acuerdo con el contexto en el cual serán usados, la investigación disponible indica que los maestros deberían usar con mayor frecuencia materiales manipulables durante la instrucción matemática, para dar a los estudiantes la experiencia manual que les ayude a construir significados útiles para los conceptos matemáticas que están aprendiendo. Usar este tipo de objetos para enseñar múltiples ideas en el curso de la escolaridad tiene la ventaja de acortar la cantidad de tiempo de la enseñanza, además de que ayuda a los estudiantes a visualizar las conexiones entre las ideas.

La utilización de objetos no debiera limitarse a las demostraciones. Es esencial que los niños los usen de manera significativa, rígida y preescrita, y que su enfoque se aplique al razonamiento más que a la memoria. Así, como dice Thompson, "antes de que los estudiantes puedan hacer uso productivo de los materiales concretos, deben comprometerse a entender las actividades y a expresar lo que entendieron de forma clara. Además, es importante que los estudiantes lleguen a ver la relación bidireccional entre la materialización de un concepto matemático y el sistema de notación utilizado para representarlo".

Referencias: Fuson y Briars (1990), Hiebert y Wearne 1992), Labinowicz (1985), Leinenbach y Raymond (1996), Resnick y Omanson (1987), Sowell (1989), Suydam y Higgins (1977), Thompson (1992) y Varelas y Becker (1997).

10. El uso de calculadoras

El empleo de calculadoras en el aprendizaje de las matemáticas puede traer consigo un incremento en el aprovechamiento y una mejor actitud por parte de los estudiantes.

Resultados de la investigación

El impacto del uso de las calculadoras en el aprendizaje de los estudiantes ha sido un objeto de análisis muy popular en el ámbito de la educación matemática. Numerosos estudios han mostrado consistentemente que el empleo concienzudo de las calculadoras en las clases de matemáticas mejora el aprovechamiento y la actitud hacia esta disciplina.

A través de un meta-análisis de 79 estudios sobre calculadoras no gráficas, Hembree y Dessart concluyeron que el uso de calculadoras manuales mejoró el aprendizaje de los estudiantes. En particular, se encontraron mejoras en la comprensión de conceptos aritméticos y en las habilidades de los alumnos para solucionar problemas. El análisis también mostró que los estudiantes que ocuparon calculadoras tendieron a tener mejores conceptos propios y mejor actitud hacia las matemáticas que quienes no las usaron. También descubrieron que no merman las habilidades de los estudiantes para hacer cálculos con lápiz y papel cuando las calculadoras son usadas como parte de la enseñanza de matemáticas.

La investigación sobre el empleo de calculadoras científicas con capacidad gráfica también mostró efectos positivos en el aprovechamiento de los estudiantes. La mayoría de los estudios encontraron efectos positivos en la habilidad de graficar de los alumnos, en la comprensión conceptual de las gráficas y en su habilidad para relacionar representaciones gráficas con otras representaciones, como tablas y símbolos. Otras áreas del contenido donde se mostraron progresos cuando las calculadoras científicas fueron usadas en la enseñanza incluyeron los conceptos de función y visualización espacial. Estudios adicionales encontraron que los estudiantes resuelven mejor los problemas cuando usan calculadoras gráficas. Son, en suma,

más flexibles en su pensamiento respecto de las estrategias de solución, tienen mayor perseverancia y se enfocan más en tratar de entender el problema conceptualmente que en simplemente hacer los cálculos. Sin embargo, si hacen un uso exagerado de las calculadoras gráficas, los estudiantes tienden a depender más de procedimientos gráficos que de otros, como los métodos algebraicos. La mayoría de los estudios de calculadoras gráficas no han encontrado efectos negativos sobre habilidades básicas, el conocimiento factual o las habilidades de cálculo.

En general, la investigación ha mostrado que el uso de calculadoras cambia el contenido, los métodos y los requerimientos de habilidades en las clases de matemáticas. Los maestros hacen más preguntas de alto nivel cuando hay calculadoras, y los alumnos llegan a involucrarse de forma más activa al hacer preguntas, conjeturas y exploraciones.

En el aula

La investigación apoya fuertemente el llamado en favor del uso de calculadoras en todos los niveles de enseñanza de matemáticas, formulado en la publicación *Currículum y estándares de evaluación para matemáticas escolares*, editada por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas. El uso planeado y cuidadoso de calculadoras puede conllevar un incremento en la habilidad de los estudiantes para solucionar problemas y mejoras en su actitud frente a las matemáticas, sin mermar sus habilidades básicas.

El uso óptimo de las calculadoras es como una herramienta para la exploración y el descubrimiento en situaciones de resolución de problemas y cuando se está introduciendo un contenido matemático nuevo. Al reducir el tiempo para calcular y al proporcionar retroalimentación inmediata, las calculadoras ayudan a los estudiantes a enfocarse en entender su trabajo y en justificar sus métodos y resultados. La calculadora graficadora es particularmente útil para ayudar a ilustrar y desarrollar conceptos gráficos y para hacer conexiones entre ideas algebraicas y geométricas.

Con el fin de reflejar con fidelidad sus significativos desempeños matemáticos, los estudiantes probablemente deberían de tener permiso de usar sus calculadoras durante los exámenes. No hacerlo es trastornar gravemente la forma usual en que muchos estudiantes

hacen matemáticas, además de ser una restricción irrealista: cuando ellos estén lejos del ambiente académico, seguramente usarán calculadoras en su vida diaria y en sus lugares de trabajo. Otro factor que aboga por el uso de las calculadoras es que en algunos exámenes oficiales ya se les permite a los estudiantes usarlas. Aún más, algunos exámenes requieren que los aspirantes utilicen calculadoras graficadoras.

Referencias: Davis (1990); Drijvers y Doorman (1996); Dunham y Dick (1994); Flores y McLeod (1990); Giamati (1991); Groves y Stacey (1998); Harvey (1993); Hembree y Dessart (1986, 1992); Mullis, Jenkins y Johnson (1994); National Council of Teachers of Mathematics (1989); Penglase y Arnold (1996); Rich (1991); Ruthven (1990); Slavit (1996); Smith (1996); Stacey y Groves (1994), y Wilson y Krapfl (1994).

Conclusiones

Como ya se mencionó, este folleto es un extracto del capítulo de matemáticas del *Manual de investigación sobre mejoramiento en el aprovechamiento de los estudiantes*, segunda edición. Provee una síntesis del conocimiento básico referente a las prácticas efectivas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estos materiales están diseñados para ser usados por maestros, directores, personas relacionadas con la enseñanza y quienes al dirigir las políticas educativas están encargados de emprender la tarea de mejorar el aprovechamiento de los estudiantes.

Se pretende que los resultados de investigación presentados sean usados como un punto de partida que pueda promover actividades de desarrollo del personal y suscitar discusiones entre los educadores, más que cómo una prescripción igualmente aplicable en todas las aulas. Como Miriam Met escribe en su capitulo sobre lenguas extranjeras del manual antes mencionado:

> "La investigación no identifica ni puede identificar la forma correcta o mejor de enseñar (...) Pero la investigación puede ilustrar qué prácticas docentes tienen mayor probabilidad de alcanzar los resultados esperados, con cuáles tipos de estudiantes y bajo qué condiciones (...) Mientras que la investigación puede indicar derroteros en algunas áreas, en la mayoría brinda pocas respuestas claras y precisas. Los maestros siguen encarando diariamente decisiones críticas acerca de cómo es mejor alcanzar las metas educativas que exigen los estándares nacionales o su actividad profesional o voluntaria. Es probable que la combinación de las prácticas sugeridas por la investigación y el juicio profesional y la experiencia lo produzcan [el alto aprovechamiento de los estudiantes]".

Así, este folleto no ofrece a los educadores toda la información que necesitan para convertirse en expertos en prácticas educativas de matemáticas basadas en la investigación. Más bien, estos materiales están diseñados para ser usados como sustrato para la discusión y posterior exploración.

Por ejemplo, un acercamiento al desarrollo profesional podría ser distribuir el folleto entre los maestros, averiguar quiénes ya usan algunos procedimientos y brindarles la oportunidad de demostrar las prácticas a sus colegas. Posteriormente, podría formarse un grupo de estudio para efectuar más lecturas y discutir. La lista extensiva de referencias y la lista de fuentes adicionales que se incluyen a continuación pueden servir como punto de partida. El trabajo de este grupo podría proporcionar la base para planear un programa de desarrollo del profesorado de mediano plazo, que permitiera a los maestros aprender más y llegar a tener la suficiente confianza para usar las prácticas seleccionadas en sus salones de clases.

Sugerencias de los usuarios del manual

Desde la publicación de la primera edición del *Manual de investigación sobre mejoramiento en el aprovechamiento de los estudiantes*, el Servicio de Investigación Educativa ha indagado entre los usuarios sobre cómo les han ayudado el manual y los materiales relacionados en sus esfuerzos por mejorar la práctica de la enseñanza. He aquí algunas de sus experiencias derivadas del uso de estos materiales para el desarrollo del personal:

- Algunos maestros sugirieron revisar una práctica al mes durante el año escolar en las juntas de departamento. Se conformaría un foro de discusión entre los maestros que ya hayan usado las prácticas (como fuentes y mentores) con otros profesores interesados en utilizarlas en sus propias aulas. Como un maestro señaló: "las iniciativas de desarrollo profesional no funcionan cuando se dice a los maestros qué necesitan, como si hubiera que llevarlos de la mano".
- Una escuela reportó que utilizó los materiales como recurso cuando los maestros se reunían para discutir enfoques alternativos que podrían ser usados con estudiantes que tuvieran dificultades. El manual "proveyó ideas y fue una guía para otros recursos".
- Especialistas en currículo estudiaron juntos el manual; después se reunieron con maestros de cada área para revisar los contenidos de los capítulos sobre materias y áreas, así como las ideas compartidas entre los especialistas. A cada maestro se le solicitó elegir una práctica basada en la investigación, que expandiría su

repertorio personal de estrategias educativas, e introducirla en los primeros tres meses del año lectivo. Especialistas y maestros del área discutieron las prácticas con profundidad y, más tarde, se reunieron únicamente los especialistas con el fin de compartir las ideas que generaron los maestros.

- Un lector identificó que para estos materiales era muy importante validar las prácticas que los maestros ya emplean durante la instrucción. "Para los maestros es importante tanto conocer qué saben como lo que todavía tienen que aprender", dijo.
- Luego que revisaron y discutieron los resultados de la investigación, los maestros de un distrito escolar recibieron capacitación y apoyo para profundizar en las estrategias de su interés.
- Una directora, que expresaba su preocupación por el tiempo que los maestros de su escuela pasaban en la fotocopiadora, dejó cerca de la máquina una copia del manual y encontró que el formato corto le permitió a lo maestros leer rápidamente una de las prácticas.
- Otra sugerencia hecha por los profesores fue usar los materiales para ayudar a los maestros menos experimentados a "aminorar sus dificultades". Los maestros con más experiencia trabajarían con ellos a fin de que crecieran y refinaran su repertorio de estrategias.

El contexto: una cultura escolar para el desarrollo del personal

La experiencia ha demostrado que los maestros necesitan tiempo para absorber nueva información, observar y discutir nuevas prácticas y recibir el entrenamiento necesario para tener confianza con las nuevas técnicas. A menudo esto implica cambiar los horarios tradicionales para dar a los maestros la ocasión de reunirse regularmente con sus colegas, con el fin de adquirir nuevas habilidades y proveer de instrucción. A medida que las escuelas continúen con la tarea de mejorar el aprovechamiento de los estudiantes al perfeccionar el conocimiento básico de los maestros, la necesidad de reestructurar las escuelas será cada vez más y más evidente.

El éxito del uso del conocimiento básico para mejorar el aprendizaje de los estudiantes de matemáticas (como en el caso de todas las otras materias incluidas en el manual) recae en el desarrollo efec-

tivo del personal académico. Al respecto, Dennis Sparks, director ejecutivo del National Staff Development Council, en su capítulo del manual afirma:

> "Si los maestros van a aplicar consistentemente en las aulas los resultados de la investigación descritos en este manual, la alta calidad en el desarrollo del personal es esencial. Este desarrollo profesional, sin embargo, debe ser considerablemente distinto de aquel ofrecido en el pasado. No sólo debe afectar el conocimiento, las actitudes y las prácticas individuales de maestros, administradores y otros trabajadores escolares, sino también debe de alterar las culturas y estructuras de las organizaciones en las cuales trabajan".

Los cambios necesarios en la cultura del desarrollo del personal incluyen el incremento de la atención en el desarrollo de la organización y del individuo; un acercamiento al estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje; esfuerzos para desarrollar al personal académico guiados por planes estratégicos claros y coherentes; una mayor atención a las necesidades del estudiante y a los resultados de aprendizaje, así como la inclusión de habilidades pedagógicas generales y específicas.

El contenido de este folleto y el del *Manual de investigación sobre mejoramiento en el aprovechamiento de los estudiantes* pueden brindar las bases para contar con actividades de desarrollo del personal adecuadamente diseñadas. Si las escuelas dan a los maestros oportunidades generosas para aprender y colaborar, éstos podrán y desearán mejorar la enseñanza de tal manera que beneficie verdaderamente a todos los estudiantes. Para tal fin, el desarrollo profesional debe ser visto como una parte esencial e indispensable del proceso del mejoramiento de la escuela.

Recursos adicionales

Recursos disponibles a través del Servicio de Investigación Educativa

- *Handbook of research on improving student achievement* [Manual de investigación sobre el mejoramiento del desempeño del estudiante], segunda edición (207 páginas más un apéndice). Esta publicación, editada por Gordon Cawelti, brinda a los maestros, administradores y otras personas, acceso al conocimiento básico sobre las prácticas educativas que mejoran el aprendizaje del estudiante en las materias más importantes, incluidas las matemáticas, desde jardín de niños hasta finalizar la educación secundaria. El manual, publicado originalmente en 1995, ha sido actualizado por sus autores, quienes son reconocidas autoridades en sus respectivas áreas. La revisión de la investigación reciente ha permitido la adición de nuevas prácticas y aumentar la comprensión de las ya existentes. Un apéndice comprende las prácticas basadas en la investigación sobre el inicio de la enseñanza de la lectura.
- *Improving student achievement in mathematics* [Mejoramiento del desempeño del estudiante en matemáticas] (28 páginas). El folleto contiene el capítulo completo de matemáticas del *Manual de investigación sobre mejoramiento del desempeño del estudiante*, escrito por Douglas A. Grouws y Kristin J. Cebulla. Incluye una introducción realizada por Gordon Cawelti y una sección de ideas para aumentar la habilidad de los maestros en el uso de prácticas educativas basadas en la investigación.
- *Improving student achievement in mathematics* [Mejoramiento del desempeño del estudiante en matemáticas]. Estos dos videos (de 30 minutos) ilustran cada una de las diez prácticas educativas descritas en el capítulo de matemáticas del manual, escenificadas en los salones de clases y con entrevistas a los maestros y administradores escolares de la Escuela del Distrito Cedar Rapids (Iowa) y las escuelas de la ciudad de Alejandría (Virginia). Las aportaciones de los maestros se basan en su ex-

periencia real en el uso de esas prácticas basadas en la investigación y pueden servir como punto de partida para enriquecer las actividades de desarrollo de personal que provocarán la discusión y exploración posterior. Cada una de las prácticas se presenta en su propio segmento, lo que da a los usuarios la opción de observarlas y estudiarlas detalladamente antes de explorar otras.

Archivos de Información de ERS

Cada archivo contiene de 70 a 100 páginas de artículos provenientes de revistas especializadas, resúmenes de estudios de investigación y literatura concerniente al tópico, además de una bibliografía que incluye una investigación del Centro de Información en Recursos Educativos (ERIC-CIJE).

- *Math education and curriculum development* [Educación matemática y desarrollo curricular]. Examina la implementación de estándares curriculares para las matemáticas, incluyendo modelos para la integración de las normas y su impacto en maestros y estudiantes.
- *Math manipulatives and calculators* [Materiales manipulables en matemáticas y calculadoras]. Describe el uso de objetos concretos para la enseñanza de conceptos matemáticos. Incluye sugerencias de materiales, el contexto para su uso y estructura o integra su manipulación como parte de la planeación de las lecciones y el uso de computadoras. Aquí se discute la conveniencia de utilizar la calculadora durante la enseñanza de conceptos matemáticos.
- *Problem solving in math and science* [Solución de problemas en matemáticas y ciencias]. Revisa los métodos y estrategias efectivos para la enseñanza de solución de problemas desde el jardín de niños hasta el doceavo grado. El material incluye ideas para actividades y métodos de evaluación.

Recursos adicionales de información

- *Every child mathematically proficient: an action plan* [Niños matemáticamente eficientes: un plan de acción]. Este texto fue desarrollado por la Learning First Alliance, organización conformada por 12 asociaciones educativas líderes en Estados Unidos. Con-

tiene recomendaciones para cambios curriculares, iniciativas de desarrollo profesional, sugerencias para la participación de los padres de familia y propuestas de reforma basadas en la investigación (24 páginas). National Education Association Professional Library: (1-800) 229-4200.

- *Improving teaching and learning in science and mathematics*,1996 [Mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de ciencias y matemáticas]. Ilustra cómo pueden utilizarse las ideas constructivistas por los educadores en ciencias y matemáticas para la investigación y el posterior mejoramiento de las prácticas de matemáticas (Teachers College Press, Teachers College, Columbia University, P.O. Box 20,Williston,VT 05495, USA. Telephone: (1-802) 864-7626).
- *Mathematics, science and technology education programs that work, and promising practices in mathematics and scienc*e [Programas educativos en matemáticas, ciencias y tecnología que funcionan y prácticas prometedoras en matemáticas y ciencias]. Publicado por el Departamento de Educación de Estados Unidos. Consta de dos volúmenes; el primero describe programas de la Red de Departamentos Nacionales de Difusión; el segundo aborda programas exitosos seleccionados por la Oficina de Mejoramiento e Investigación Educativa (Stock No. 065-000-00627-8. Available from Superintendent of Documents, P.O. Box 371954, Pittsburgh, PA 15250-7954, USA. Telephone: (1-202) 512-1800; fax: (1-202) 512-2250).
- *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* [Lineamientos curriculares y de evaluación para las matemáticas escolares]. Describe 54 estándares desarrollados por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, "con el propósito de crear una visión coherente de los conocimientos matemáticos y proporcionar estándares que guíen la revisión de los currículos matemáticos en la próxima década". (Available from National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593, USA. Telephone: (1-703) 620-9840; fax: (1-703) 476-2970).
- *Eisenhower National Clearinghouse* (Agencia distribuidora nacional Eisenhower, Universidad Estatal de Ohio). Miembro de una red fundada por el Departamento de Educación de Estados Unidos que agrupa a diez consorcios regionales de ciencias y mate-

máticas con el fin de identificar y difundir materiales y brindar asistencia técnica en herramientas y métodos de enseñanza a las escuelas, maestros y administradores, además de trabajar con otras organizaciones con la intención de mejorar la educación de las matemáticas y la ciencia (www.enc.org).

- *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*. Centro Wisconsin para la Investigación Educativa, Universidad de Wisconsin-Madison. Sus publicaciones incluyen la revista trimestral *Principled practice*, en la cual se examinan observaciones de los educadores en torno a los problemas de la educación matemática y científica. 1025 West Jonhson Street, Madison WI 53706, USA.
  Teléfono: (1-608) 265-6240; fax: (1-608) 263-3406.
  Correo electrónico: ncisla@mail.soemadison.wisc.edu;
  dirección electrónica: www.wcer.wisc.edu/ncisla

Sitios electrónicos relacionados

- ERIC, Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education: www.ercse.org/sciindex.html
- The Regional Alliance for Mathematics and Science Education: http://ra.terc.edu/alliance/HubHome.htlm
- National Council of Teachers of Mathematics: www.nctm.org

Referencias

American Association of University Women (1998). *Gender gaps: where schools still fail our children*. Washington, DC, AAUW.

Atanda, D. (1999). *Do gatekeeper courses expand education options?* Washington, DC, National Center for Education Statistics (NCES 1999303).

Aubrey, C. (1997). *Mathematics teaching in the early years: an investigation of teachers' subject knowledge*. London, Falmer Press.

Ball, D. (1993). "With an eye on the mathematical horizon: dilemmas of teaching elementary school mathematics". *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 93, p. 373-97.

Boaler, J. (1998). "Open and closed mathematics: student experiences and understandings", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 29, p. 41-62.

Brownell, W.A. (1945). "When is arithmetic meaningful?", en *Journal of educational research* (Washington, DC), vol. 38, p. 481-98.

__ (1947). "The place of meaning in the teaching of arithmetic", en *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 47, p. 256-65.

Carpenter, T.P. *et al.* (1988). "Teachers pedagogical content knowledge of students problem solving in elementary arithmetic", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 385-401.

__ (1989). "Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: an experimental study", en *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 26, p. 499-531.

__ (1998). "A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 29, p. 3-20.

Cobb, P.; Yackel, E. y Wood, T. (1992). "A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 23, p. 2-23.

Cobb, P. *et al.* (1991). "Assessment of a problem-centered secondgrade mathematics project", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 3-29.

__ (1992). "Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis", en *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 29, p. 573-604.

Cognition and Technology Group (1997). *The Jasper Project: lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development.* Mahwah, NJ, Erlbaum.

Cohen, E.G. (1994). "Restructuring the classroom: conditions for productive small groups", en *Review of educational research* (Washington, DC), vol. 64, p. 1-35.

Davidson, N. (1985). "Small group cooperative learning in mathematics: a selective view of the research", en Slavin, R., ed. *Learning to cooperate, cooperating to learn*, p. 211-30. New York, Plenum Press.

Davis, M. (1990). *Calculating women: precalculus in context*. Paper presented at the Third Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Columbus, OH.

Drijvers, P. y Doorman, M. (1996). "The graphics calculator in mathematics education", en *Journal of mathematical behavior* (Stamford, CT), vol. 15, p. 425-40.

Dunham, P.H. y Dick, T.P. (1994). "Research on graphing calculators", en *Mathematics teacher* (Reston, VA), vol. 87, p. 440-45.

Fawcett, H.P. (1938). *The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in senior high school to develop an understanding of the nature of proof.* 1938 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. New York, Columbia University, Teachers College.

Fennema, E.; Carpenter, T.P. y Peterson, P.L. (1989). "Learning mathematics with understanding: cognitively guided instruction", en Brophy, J., ed. *Advances in research on teaching*, p. 195-221. Greenwich,CT, JAI Press.

Fennema, E. *et al.* (1993). "Using children's mathematical knowledge in instruction", en *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 30, p. 555-83.

__ (1996). "A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 27, p. 403-34.

Flanders, J.R. (1987). "How much of the content in mathematics textbooks is new?", en *Arithmetic teacher* (Reston, VA), vol. 35, p. 18-23.

Flores, A. y McLeod, D.B. (1990). *Calculus for middle school teachers using computers and graphing calculators*. Paper presented at the Third Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Columbus, OH.

Fuson, K.C. (1992). "Research on whole number addition and subtraction", en Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 243-75. New York, Macmillan.

Fuson, K.C. y Briars, D.J. (1990). "Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 21, p. 180-206.

Giamati, C.M. (1991). *The effect of graphing calculator use on students understanding of variations of their graphs*, tesis doctoral, University of Michigan. *Dissertation abstracts international*, vol. 52, 103A (University Microfilms No. AAC 9116100).

Good, T.L.; Grouws, D.A. y Ebmeier, H. (1983). *Active mathematics teaching.* New York, Longman.

Greeno, J.G. (1991). "Number sense as situated knowing in a conceptual domain", en *Journal for research in mathematics education* (Reston,VA), vol. 22, p. 170-218.

Grouws, D.A. y Smith, M.S. En prensa. "Findings from NAEP on the preparation and practices of mathematics teachers", en Silver, E.A. y Kenney, P., eds. *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress.* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Groves, S. y Stacey, K. (1998). Calculators in primary mathematics: exploring number before teaching algorithms, en Morrow, L.J., ed. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, p. 120-29. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Harvey, J.G. (1993). *Effectiveness of graphing technology in a precalculus course: the 1988-89 field test of the C3PC materials.* Paper presented at the Technology in Mathematics Teaching Conference, Birmingham, UK.

Hawkins, E.F., Stancavage, F.B. y Dossey, J.A. (1998). *School policies and practices affecting instruction in mathematics: findings from the National Assessment of Educational Progress.* Washington, DC, National Center for Educational Statistics (NCES 98-495).

Heid, M.K. (1988). "Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 3-25.

Hembree, R. y Dessart, D.J. (1986). "Effects of hand-held calculators in pre-college mathematics education: a meta-analysis", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 17, p. 83-99.

__ (1992). "Research on calculators in mathematics education", en Fey, J.T., ed. *Calculators in mathematics education.* 1992 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, p. 22-31. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). "Learning and teaching with understanding", en Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 65-97. New York, Macmillan.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1992). "Links between teaching and learning place value with understanding in first grade". *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 98-122.

__ (1993). "Instructional tasks, classroom discourse, and students learning in second-grade arithmetic", en *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 30, p. 393-425.

__ (1996). "Instruction, understanding and skill in multidigit addition and subtraction", en *Cognition and instruction* (Hillsdale, NJ), vol. 14, p. 251-83.

Hiebert, J. *et al.* (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH, Heinemann.

Husén, T. (1967). *International study of achievement in mathematics*, vol. 2. New York, Wiley.

Kamii, C. (1985). *Young children reinvent arithmetic: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.

__ (1989). *Young children continue to reinvent arithmetic: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.

__ (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic in 3rd grade: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.

Keeves, J.P. (1976). "Curriculum factors influencing school learning", en *Studies in educational evaluation* (Kidlington, UK), vol. 2, p. 167-84.

__ (1994). *The world of school learning: selected key findings from 35 years of IEA research*. The Hague, Netherlands, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Kilpatrick, J. (1992). "A history of research in mathematics education", en Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 3-38. New York, Macmillan.

Knapp, M.S.; Shields, P.M. y Turnbull, B.J. (1995). "Academic challenge in high-poverty classrooms", en *Phi Delta Kappan* (Bloomington, IN), vol. 77, p. 770-76.

Koehler, M. y Grouws, D.A. (1992). "Mathematics teaching practices and their effects", en Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 115-26. New York, Macmillan.

Kulm, G.; Morris, K. y Grier, L. (1999). *Middle grade mathematics textbooks: a benchmarks-based evaluation*. Washington, DC, American Association for the Advancement of Science.

Labinowicz, E. (1985). *Learning from students: new beginnings for teaching numerical thinking*. Menlo Park, CA, Addison-Wesley.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: a learning situation?, en Biehler, R. *et al.*, eds. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, p. 147-58. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Leinenbach, M. y Raymond, A.M. (1996). "A two-year collaborative action research study on the effects of a 'hands-on' approach to learning algebra", en Jakubowski, E., ed. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ciudad de Panamá, FL. (ERIC Document Reproduction; Service No. ED 400 178).

Mack, N.K. (1990). "Learning fractions with understanding: building on informal knowledge", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 21, p. 16-32.

Markovits, Z. y Sowder, J. (1994). "Developing number sense: an intervention study in grade 7", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 25, p. 4-29.

McKnight, C.C. *et al.* (1987). *The underachieving curriculum*. Champaign, IL, Stipes.

Mullis, I.V.S.; Jenkins, F. y Johnson, E.G. (1994). *Effective schools in mathematics: perspectives from the NAEP 1992 assessment*. Washington, DC, United States Department of Education, Office of Educational Research and Improvement (Report No. 23-RR-01).

National Center for Education Statistics (1996). *Pursuing excellence: a study of US eighth-grade mathematics and science teaching, learning, curriculum and achievement in international context*. Washington, DC, United States Department of Education (NCES Report 97-198).

__ 1997. *Pursuing excellence: a study of U.S. fourth-grade mathematics and science achievement in international context*. Washington, DC, United States Department of Education. (NCES Report 97-255.)

__ (1998). *Pursuing excellence: a study of US twelfth-grade mathematics and science achievement in international context*. Washington, DC, United States Department of Education (NCES Report 98-049).

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and valuation standards for school mathematics*. Reston, VA, NCTM.

Penglase, M. y Arnold, S. (1996). "The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research", en *Mathematics education research journal* (Campbelltown, Australia), vol. 8, p. 58-90.

Resnick, L.B. (1980). "The role of invention in the development of mathematical competence", en Kluwe, R.H.; Spada, H., eds. *Developmental models of thinking*, p. 213-44. New York, Academic Press.

Resnick, L.B. y Omanson, S.F. (1987). "Learning to understand arithmetic", en Glaser, R., ed. *Advance in instructional psychology*, vol. 3, p. 41-95. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Reys,B.J.;Barger,R.H.1994. Mental computation:issues from the United States perspective. *In:* Reys, R.E.; Nohda, N., eds. *Computational alternatives for the twenty-first century*, p. 31-47. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B.J. *et al.* (1991). *Developing number sense in the middle grades*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Rich, B.S. (1991). *The effects of the use of graphing calculators on the learning of function concepts in precalculus mathematics*, tesis doctoral, University of

Iowa. *Dissertation abstracts international*, vol. 52, 835A (University Microfilms No. AAC 9112475).

Ruthven, K. (1990). "The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms", en *Educational studies in mathematics* (Dordrecht, Netherlands), vol. 21, p. 431-50.

Schmidt, W.H.; McKnight, C.C. y Raizen, S.A. (1997). *A splintered vision: an investigation of U.S. science and mathematics education*. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Secada, W.G. (1992). "Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics", en Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 623-60. New York, Macmillan.

Skemp, R.R. (1978). "Relational understanding and instrumental understanding", en *Arithmetic teacher* (Reston, VA), vol. 26, p. 9-15.

Slavin, R.E. (1990). "Student team learning in mathematics", en Davidson, N., ed. *Cooperative learning in math: a handbook for teachers*, p. 69-102. Reading, MA, Addison-Wesley.

__ (1995). *Cooperative learning: theory, research, and practice.* 2a. ed., Boston, Allyn y Bacon.

Slavit, D. (1996). "Graphing calculators in a 'hybrid' algebra II classroom", en *For the learning of mathematics: an international journal of mathematics education* (Montreal, Canadá) vol. 16, p. 9-14.

Smith, B.A. (1996). *A meta-analysis of outcomes from the use of calculators in mathematics education,* tesis doctoral, Texas AyM University at Commerce. *Dissertation Abstracts International*, vol. 58, 03.

Sowder, J. (1992*a*). "Estimation and number sense", en Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 371-89. New York, Macmillan.

__ (1992*b*). "Making sense of numbers in school mathematics", en Leinhardt, R.; Putnam, R.; Hattrup, R., eds. *Analysis of arithmetic for mathematics education*, p. 1-51. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Sowell, E.J. (1989). "Effects of manipulative materials in mathematics instruction", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 20, p. 498-505.

Stacey, K. y Groves, S. (1994). *Calculators in primary mathematics*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Indianapolis, IN.

Stigler, J.W. y Hiebert, J. (1997). "Understanding and improving classroom mathematics instruction", en *Phi Delta Kappan* (Bloomington, IN), vol. 79, p. 14-21.

Stigler, J.W. *et al.* (1999). *The TIMSS videotape study: methods and findings from an exploratory research project on eighth grade mathematics instruction in Germany, Japan and the United States.* Washington, DC, National Center for Education Statistics (NCES 99-130).

Suarez, T.M., *et al.* (1991). "Enhancing effective instructional time: a review of research", en *Policy brief*, vol. 1, núm. 2. Chapel Hill, NC, North Carolina Educational Policy Research Center.

Suydam, M.N. y Higgins, J.L. (1977). *Activity-based learning in elementary school mathematics: recommendations from research*. Columbus, OH, ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Thompson, P.W. (1992). "Notations, conventions, and constraints: contributions of effective uses of concrete materials in elementary mathematics", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 23, p. 123-47.

Van Engen, H. (1949). "An analysis of meaning in arithmetic", en *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 48, p. 395-400.

Varelas, M. y Becker, J. (1997). "Children's developing understanding of place value: semiotic aspects", en *Cognition and instruction* (Hillsdale, NJ), vol. 15, p. 265-86.

Wearne, D. y Hiebert, J. (1988). "A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: testing a local theory using decimal numbers", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 371-84.

Webb, N.M. (1991). "Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 366-89.

Webb, N.M.; Troper, J.D. y Fall, R. (1995). "Constructive activity and learning in collaborative small groups", en *Journal of educational psychology* (Washington, DC), vol. 87, p. 406-423.

Wilson, M.R. y Krapfl, C.M. (1994). "The impact of graphics calculators on students understanding of function", en *Journal of computers in mathematics and science teaching* (Charlottesville, VA), vol. 13, p. 252-64.

Wood, T. (1999). "Creating a context for argument in mathematics class", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 30, p. 171-91.

Wood,T.; Cobb, P. y Yackel, E. (1995). "Reflections on learning and teaching mathematics in elementary school", en Steffe, L.P.; Gale, J., eds. *Constructivism in education*, p. 401-22. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, T.; Sellers, P. (1996). "Assessment of a problem-centered mathematics program: 3rd grade", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 27, p. 337-53.

__ (1997). "Deepening the analysis: longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 28, p. 163-86.

Wood,T. *et al.* (1993). "Rethinking elementary school mathematics: insights and issues", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), monographs, 6.

Yackel, E.; Cobb, P. y Wood, T. (1991). "Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics", en *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 390-408.

La Oficina Internacional de Educación

La Oficina Internacional de Educación (International Bureau of Education, IBE), fundada en Ginebra en 1925, se convierte en 1929 en la primera organización privada intergubernamental en el campo de la educación y en 1969 se integra a la UNESCO sin perder por ello su autonomía. Tres líneas principales rigen su acción: organización de las sesiones de la Conferencia Internacional sobre Educación, análisis y difusión de informes y documentos relacionados con la educación (en particular sobre innovaciones en los currículos y los métodos de enseñanza) y realización de estudios e investigaciones comparativos en el campo de la educación.

Actualmente, el IBE a) administra la base mundial de datos en educación, la cual compara información de los sistemas educativos de los países; b) organiza cursos sobre desarrollo curricular en naciones en vías de desarrollo; c) recopila y difunde innovaciones relevantes en educación mediante su banco de datos INNODATA; d) coordina la preparación de los reportes nacionales sobre el desarrollo de la educación; e) otorga la Medalla Comenius a maestros o docentes destacados y a investigadores educativos y f) publica la revista trimestral sobre el tema *Prospectiva*, el periódico trimestral *Información e innovación educativa* y la guía para estudiantes extranjeros *Estudios en el extranjero*, entre otras publicaciones.

En cuanto a sus cursos de capacitación en diseño curricular, el organismo ha establecido redes regionales y subrregionales sobre la administración del cambio curricular y ofrece un nuevo servicio: una plataforma para el intercambio de información sobre contenidos.

La Oficina es regida por un Consejo conformado por representantes de 28 países miembros, elegidos durante la Conferencia General de la UNESCO.

Por último, el IBE se enorgullece de colaborar con la Academia Internacional de Educación en la publicación de este material para promover el intercambio de información sobre prácticas educativas.

La Academia Internacional de Educación

La Academia Internacional de Educación (AIE) es una asociación científica no lucrativa que promueve investigación educativa, su difusión y la aplicación de sus resultados. La Academia, fundada en 1986, está dedicada a la consolidación de las contribuciones de la investigación para resolver problemas críticos de educación en todas partes del mundo y a la promoción de una mejor comunicación entre los creadores de política, investigadores y profesionales. La base de la Academia se encuentra en la Academia Real de Ciencia, Literatura y Artes en Bruselas, Bélgica, y su centro de coordinación, en la Universidad Curtin de Tecnología en Perth, Australia.

El propósito general de la AIE es patrocinar la excelencia escolar en todos los campos de educación. Para este fin, la Academia provee síntesis oportunas de evidencia basada en investigación de importancia internacional. Los actuales miembros de la mesa directiva de la Academia son:

Erik De Corte, Universidad de Leuven, Bélgica (presidente)
Herbert Walberg, Universidad de Ilinois en Chicago, Estados Unidos (vicepresidente)
Barry Fraser, Universidad Curtin de Tecnología, Australia (director ejecutivo)
Jacques Hallak, UNESCO, París, Francia
Michael Kirst, Universidad de Stanford, Estados Unidos
Ulrich Teichler, Universidad de Kassel, Alemania
Margaret Wang, Universidad Temple, Estados Unidos

http://www.curtin.edu.au./curtin/dept/smec/iae

SERIE PRÁCTICAS EDUCATIVAS - 4

Con motivo de la próxima celebración de la Asamblea General de la Academia Internacional de Educación, que se realizará en nuestro país en septiembre de 2006, cinco instituciones mexicanas acordaron traducir y publicar en español la serie *Prácticas educativas*, editada originalmente por la Oficina Internacional de Educación y la Academia Internacional de Educación.

El Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C. (Ceneval) ofrece servicios de evaluación a escuelas, universidades, empresas, autoridades educativas, organizaciones de profesionales del país y otras instancias particulares y gubernamentales del país y del extranjero.

El Departamento de Investigaciones Educativas (DIE) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) es un órgano descentralizado del gobierno federal que tiene como principales actividades la investigación, la enseñanza de posgrado y la difusión.

El Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE) es una asociación civil cuyo propósito es impulsar y consolidar la actividad de grupos de investigadores en el campo educativo. Organiza cada dos años el Congreso Nacional de Investigación Educativa y edita la *Revista Mexicana de Investigación Educativa*.

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) tiene como tarea ofrecer a las autoridades educativas y al sector privado herramientas idóneas para la evaluación de los sistemas educativos, en lo que se refiere a educación básica (preescolar, primaria y secundaria) y media superior.

La Universidad Pedagógica Nacional (UPN) es una institución pública de educación superior cuyos objetivos son contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación y constituirse en institución de excelencia para la formación de los maestros.

IBE/2000/ST/EP04